Chapitre VI

Superposition des ondes lumineuses

Sommaire

I Expériences préliminaires

I.1 Superposition de deux vibrations lumineuses issues de deux sources

Superposons deux vibrations lumineuses issues chacune d'un laser He-Ne. La zone commune aux deux faisceaux montre simplement une augmentation perceptible de l'intensité lumineuse, sans autre phénomène.

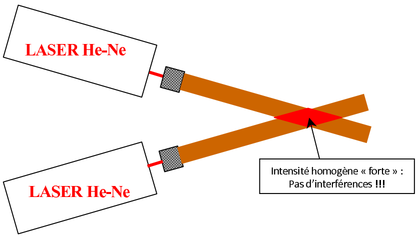


FIGURE VI.1 – Superposition de deux faisceaux laser distincts ⇒ absence d'interférences

I.2 Superposition de deux vibrations lumineuses issues d'une même source

Le dispositif expérimental des trous d'Young se compose d'un très petit trou S (source primaire) éclairé par un faisceau de lumière parallèle monochromatique, la lumière sortant de S éclairant un ensemble de deux très petits trous disposés dans un plan perpendiculaire à l'axe du montage;

On utilise pratiquement un faisceau LASER comme source primaire.

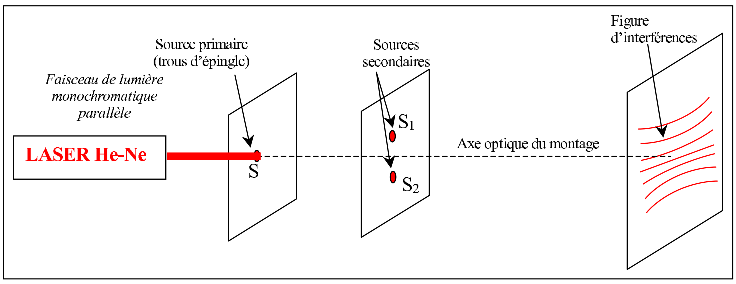


FIGURE VI.2 – Expériences des trous d'Young

Enfin, on dispose un écran loin des sources, et perpendiculaire à l'axe optique du montage. On constate alors l'apparition de **franges d'interférences** sur l'écran d'observation **dans la zone commune des faisceau issus de chacun des trous**.

Ainsi, on constate que dans la zone commune des faisceaux, les intensités de ces derniers ne s'additionnent pas. En appelant :

$I_1(M \in \text{zone commune})$ l'intensité du premier faisceau en M

et

$I_2(M \in \text{zone commune})$ l'intensité du second faisceau en M

on a :

$$\boxed{I(M \in \text{zone commune}) \neq I_1(M) + I_2(M)}$$

ainsi, il n'y a pas de superposition des intensités des deux faisceaux.

<u>OBJECTIFS :</u>

- **Conditions requises d'obtention des interférences ?**
- **Caractéristiques des figures d'interférences (géométrie) ? A 2 ondes ? A N ondes ?**
- **Dispositifs classiques d'interférences ? (cf chap.** $\left[\begin{array}{l}\textbf{trous d'Young}\\ \textbf{interféromètre de Michelson}\end{array}\right.$

II Superposition de deux ondes

II.1 Intensité de deux ondes superposées - terme d'interférences

Considérons deux ondes lumineuses harmoniques de forme quelconque (la suite se concentre sur le cas des ondes sphériques et planes) se propageant dans le vide, de pulsations à priori différentes ω_1 et ω_2. On donne l'expression de leur vibration lumineuse en un point M quelconque de l'espace :

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_1(M,t)=\psi_{01}(M)\cos(\omega_1 t-\varphi_1(M))\\ \psi_2(M,t)=\psi_(M)\cos(\omega_2 t-\varphi_2(M))\end{array}\right.$$

La vibration résultante s'écrit :

$$\psi(M,t)=\psi_{01}(M)\cos(\omega_1 t-\varphi_1(M))+\psi_{02}(M)\cos(\omega_2 t-\varphi_2(M))$$

Calculons ensuite l'intensité lumineuse résultant au point M :

$$I(M)=K\left\langle\psi(M,t)^2\right\rangle_t=K\left\langle[\psi_1(M,t)+\psi_2(M,t)]^2\right\rangle_t$$

soit :

$$I(M)=K\psi_{01}^2(M)<\cos^2(\omega_1 t-\varphi_1(M))>_t+K\psi_{02}^2(M)<\cos^2(\omega_2 t-\varphi_2(M))>_t+ \\ 2K\psi_{01}(M)\psi_{02}(M)\left\langle\cos(\omega_1 t-\varphi_1(M))\times\cos(\omega_2 t-\varphi_2(M))\right\rangle_t$$

En notant :

$$\begin{cases}I_1(M)=\frac{K}{2}\psi_{01}^2(M)\ \Rightarrow\ \psi_{01}=\sqrt{\dfrac{2}{K}}\sqrt{I_1(M)}\\ I_2(M)=\frac{K}{2}\psi_{02}^2(M)\ \Rightarrow\ \psi_{02}=\sqrt{\dfrac{2}{K}}\sqrt{I_2(M)}\end{cases}$$ les intensités des ondes ψ_1 et ψ_2 prises seules en M

on obtient :

$$I(M)=I_1(M)+I_2(M)+K\psi_{01}(M)\psi_{02}(M)\underbrace{\left\langle\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t-\varphi_1(M)-\varphi_2(M)\right]\right\rangle_t}_{=0} \\ +K\psi_{01}(M)\psi_{02}(M)\left\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t-(\varphi_1(M)-\varphi_2(M))\right]\right\rangle_t \quad \text{(VI.1)}$$

soit finalement en remarquant $K\psi_{01}\psi_{02}=K\dfrac{\sqrt{2I_1}}{\sqrt{K}}\times\dfrac{\sqrt{2I_2}}{\sqrt{K}}=2\sqrt{I_1I_2}$

il vient :

$$I(M)=I_1(M)+I_2(M)+2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\left\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t+\varphi_2(M)-\varphi_1(M)\right]\right\rangle_t$$

En outre, nous savons qu'un détecteur d'intensité lumineuse évalue une valeur moyenne sur une durée d'acquisition $\tau_a >> T$, ainsi l'intensité effectivement mesurée s'écrit :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\,\underbrace{\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right]\rangle_{\tau_a}}_{\text{TERME D'INTERFÉRENCES}}} \tag{VI.2}$$

Propriété - (II.1) - 1:

En supposant que $I_1(M) \simeq I_2(M)$ (c'est le cas si les sources sont identiques et à même distance du point M de mesure), le terme souligné ci-dessus est le seul terme susceptible de conduire à une non-uniformité de l'intensité lumineuse suivant le point M. C'est le terme responsable du **phénomène d'interférences** *et est appelé* **terme d'interférences (TI).**

II.2 Conditions d'obtention

Détaillons un peu plus le terme d'interférences :

$$TI = \langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right]\rangle_{\tau_a}$$

Nous savons en réalité que l'onde émise par une source ne peut être purement monochromatique, mais est en fait une succession de trains d'onde sans relation de phase fixe entre eux.Supposons que les trains d'ondes 1 et 2 soient émis par deux sources ponctuelles S_{01} et S_{02} ; les termes de phase s'écrivent alors pour chaque onde :

$$\begin{cases} \varphi_1(M) = k_0 \overset{\frown}{S_{01}M} + \underbrace{\phi_1(t)}_{\text{(on ajoute terme de phase aléatoire source 1)}} \\ \varphi_2(M) = k_0 \overset{\frown}{S_{02}M} + \underbrace{\phi_2(t)}_{\text{(on ajoute terme de phase aléatoire source 2)}} \end{cases}$$

donc :

$$TI = \left\langle \cos\left[(\omega_1-\omega_2)t + k_0\left[\overset{\frown}{S_{02}M} - \overset{\frown}{S_{01}M}\right] + \phi_2(t) - \phi_1(t)\right]\right\rangle_{\tau_a}$$

a - Condition sur les pulsations : isochronisme ou quasi-isochronisme des sources

Afin d'éviter la fluctuation temporelle rapide du TI, et donc imperceptible par le détecteur qui renverrait une valeur moyenne nulle, on doit assurer une $\begin{cases}\text{stationnarité} \\ \text{ou} \\ \text{quasi-stationnarité}\end{cases}$ du terme $(\omega_2 - \omega_1)t$.

A RETENIR :

Pour observer un phénomène d'interférences à deux ondes, les sources doivent obligatoirement être de même pulsation $\omega = \omega_1 = \omega_2$. On parle d'isochronisme des sources

NB : ceci est une condition nécessaire non suffisante !

b - Condition sur les phases à l'origine : nécessité d'un diviseur d'onde

La stationnarité du TI nécessite la stationnarité de $\phi_2(t) - \phi_1(t) \Longrightarrow$ les trains d'onde émis par les sources étant aléatoires, il ne peut y avoir d'interférences si on utilise deux sources distinctes **même identiques** :

Expérience de cours : tentative d'interférences avec 2 lasers identiques.

A RETENIR :

Pour observer un phénomène d'interférences à deux ondes, on doit imposer une phase à l'origine identique pour les deux ondes :

$$\boxed{\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi(t)}$$

Conclusion : les deux ondes doivent être issues de la même source primaire.

PROPRIÉTÉ - (II.2) - 2:

Les interférences sont obtenues par séparation d'une onde unique en deux ondes issue de la même source origine.
$\Rightarrow$ **nécessité d'utiliser un diviseur d'onde pour fabriquer deux sources secondaires isochrones, et de déphasage à l'origine fixe.**

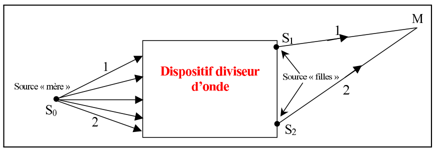


FIGURE VI.3 – Principe d'un diviseur d'onde

Exemples : diviseur de front d'onde (DFO) et diviseur d'amplitude (DA) (utilise la réflexion en général)

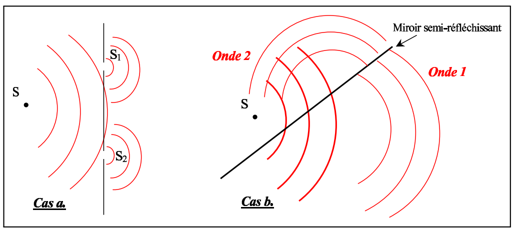


FIGURE VI.4 – Séparation d'onde par division du front d'onde (a) ou division d'amplitude (b).

On écrira finalement l'intensité d'interférences entre les rayons 1 et 2 est :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos\left[k_0 \left((S_0\overset{\frown}{}M)_2 - (S_{01}\overset{\frown}{}M)_1\right)\right]$$

soit en introduisant $\delta(M) = \left(S_0\overset{\frown}{}M\right)_2 - \left(S_0\overset{\frown}{}M\right)_1$ appelée **différence de marche au point M**, on a :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos\underbrace{\left[k_0\delta(M)\right]}_{=\Delta\varphi(M)}}$$

avec $\Delta\varphi(M)$ différence de phase des deux vibrations lumineuses au point M.

c - Une autre condition : condition de cohérence - trains d'onde jumeaux

Les sources réelles émettent des trains d'onde de durée finie (cf chapitre précédent, par. "Modèles de sources"), et fatalement d'extension spatiale finie L_c appelée longueur de cohérence.

Lors d'une tentative d'interférences, deux cas de figure peuvent se présenter :

▶ les trains d'onde "jumeaux" issus du séparateur d'onde se superposent : **l'interférence à lieu** puisque la phase à l'origine de ces trains d'onde est identique :

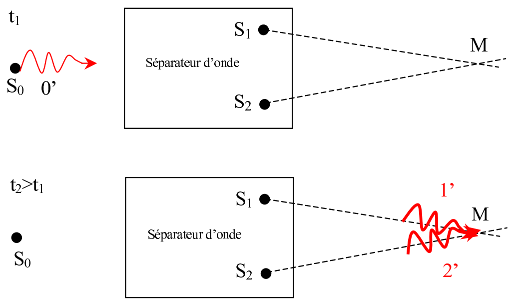


FIGURE VI.5 – Superposition de trains d'onde jumeaux

▶ les trains d'onde "jumeaux" issus du séparateur d'onde ne se superposent plus : ce sont des trains d'onde de phase à l'origine non identique et donc non corrélés qui se superposent, **l'interférence n'a pas lieu**.

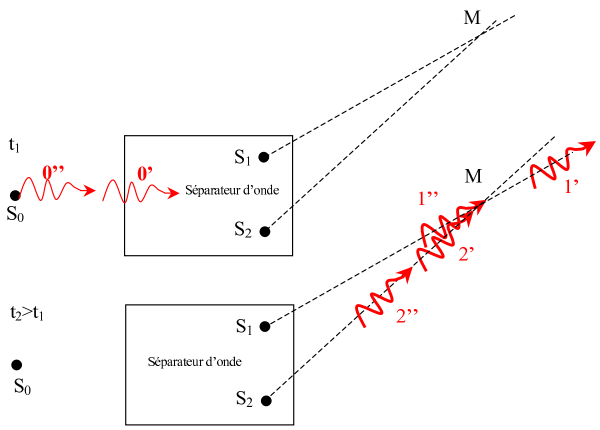


FIGURE VI.6 – Superposition de trains d'onde non jumeaux

QUESTION : quel critère respecter pour assurer l'interférence de trains d'onde "jumeaux" ?
La différence de marche entre deux trains d'onde s'écrit :

$$\delta = c\Delta\tau = c(\tau_{SS_2M} - \tau_{SS_1M})$$

On constate que le recouvrement de deux trains d'onde "jumeaux" est assuré tant que :

$$\boxed{\delta \leq c\tau_c = L_c \text{ longueur de cohérence}} \quad \text{(VI.3)}$$

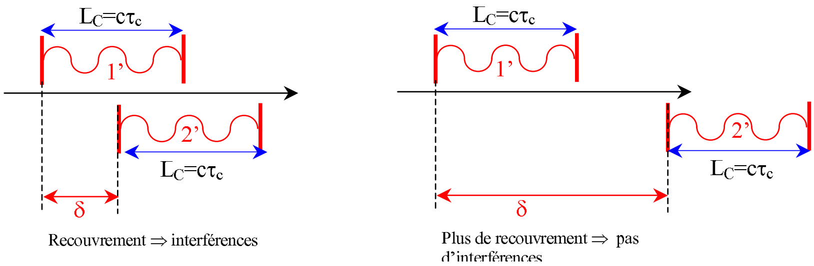


FIGURE VI.7 – Evaluation du critère de cohérence

d - Aspect «pratique» : usage de la notation complexe

Les conditions de cohérence des trains d'onde étant remplies, on pourra retenir l'onde harmonique comme modèle d'onde ⇒ **Notation complexe adaptée**.

Les deux ondes interférant s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \underline{\psi}_1(M,t) = \psi_{01}(M) \cdot e^{j(\omega t - \varphi_1(M))} \\ \underline{\psi}_2(M,t) = \psi_{02}(M) \cdot e^{j(\omega t - \varphi_2(M))} \end{cases}$$

Le champ résultant étant : $\underline{\psi}(M,t) = \underline{\psi}_1(M,t) + \underline{\psi}_2(M,t)$
l'intensité s'écrit alors :

$$I = K \left\langle \psi^2(M,t) \right\rangle$$

or la notation complexe permet de calculer facilement la valeur moyenne de toute grandeur harmonique, ainsi :

$$I = \frac{1}{2} K \mathcal{R}_e \left[\underline{\psi \psi^*} \right] = \frac{1}{2} K \left[\underline{\psi \psi^*} \right]$$

soit :

$$I(M) = \frac{1}{2} K \left[\left(\psi_{01}(M) \cdot e^{-j\varphi_1(M)} + \psi_{02}(M) \cdot e^{-j\varphi_2(M)} \right) \right] \times \left[\left(\psi_{01}(M) \cdot e^{+j\varphi_1(M)} + \psi_{02}(M) \cdot e^{+j\varphi_2(M)} \right) \right]$$

$$I(M) = \frac{1}{2} K \left[\psi_{01}^2(M) + \psi_{02}^2(M) + \psi_{01}(M)\psi_{02}(M) \left(e^{j(\phi_2 - \phi_1)} + e^{-j(\phi_2 - \phi_1)} \right) \right]$$

$$I(M) = \frac{1}{2} K \left[\psi_{01}^2(M) + \psi_{02}^2(M) + 2\psi_{01}(M)\psi_{02}(M) \cos(\phi_2(M) - \phi_1(M)) \right]$$

On retrouve finalement le résultat obtenu plus haut avec :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M) I_2(M)} \cos\left[k_0 \delta(M)\right]}$$

NB : ON ADOPTERA DÉSORMAIS LA NOTATION COMPLEXE EN RETENANT QUE :

$$\boxed{I(M) = Cste \times \underline{\psi}(M,t) \cdot \underline{\psi}^*(M,t)}$$

II.3 Superposition de deux ondes incohérentes entre elles

Dans le cas où les deux ondes sont **incohérentes** entre-elles, par exemple lorsque ces dernières sont issues de deux sources certes identiques, mais distinctes (non issues d'une source primaire commune), les termes de phase aléatoires $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ du TI n'ont pas de relation de phase fixe entre eux ; ainsi :

$$TI = \left\langle \cos\left[k_0\left[S_0\overset{\frown}{2}M - S_0\overset{\frown}{1}M\right] + \underbrace{\phi_2(t) - \phi_1(t)}_{=f(t)\neq 0}\right]\right\rangle_{\tau_a} = 0$$

donc l'intensité en M est simplement :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

A RETENIR :

PROPRIÉTÉ - (II.3) - 3:

Lorsque deux vibrations lumineuses incohérentes se superposent en un point M, l'intensité résultante est la somme des intensités en M de chacune des sources :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M)}$$

II.4 Superposition de deux ondes cohérentes entre elles

a - Formule de Fresnel

Ce qui précède a permis d'établir l'expression de l'intensité lumineuse pour deux ondes interférant en M. Ce résultat est connu sous le nom de formule de Fresnel :

A RETENIR :

$$\boxed{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]}$$ Formule de Fresnel

avec $\delta(M) = S_0\overset{\frown}{S_2}M - S_0\overset{\frown}{S_1}M$ différence de marche des 2 vibrations lumineuses issues de la source S_0 et séparées.

b - Interférogramme - ordre d'interférence

HYPOTHÈSE SIMPLIFICATRICE : on supposera $I_1 = cste_1 \neq f(M)$ et $I_2 = cste_2 \neq f(M)$ (valable par exemple dans le cas des ondes planes)

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(k_0\delta(M)\right)$$

La fonction $I(M)$ varie donc sinusoïdalement entre deux valeurs extrêmes :

- **Interférences constructives donc franges brillantes pour :**

$$k_0\delta(M_{max}) = 2m\pi \ m \in \mathbb{Z}$$

soit :

$$\delta(M) = m\lambda_0$$

L'intensité est alors :

$$\boxed{I(M_{max}) = I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2}$$

- **Interférences destructives donc franges sombres pour :**

$$k_0\delta(M_{min}) = (2m+1)\pi = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \ m \in \mathbb{Z}$$

soit

$$\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$$

L'intensité est alors :

$$\boxed{I(M_{min}) = I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2}$$

Définition - (II.4) - 1:

On définit l'ordre d'interférence au point M par :

$$\boxed{p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda_0(vide)}}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \textbf{sur une frange brillante : ordre } p(M_{max}) = \dfrac{\delta(M_{max})}{\lambda_0} = m \textbf{ entier} \\ \\ \textbf{sur une frange sombre : ordre } p(M_{max}) = \dfrac{\delta(M_{max})}{\lambda_0} = m + \dfrac{1}{2} \textbf{ demi-entier} \end{cases}$$

On peut alors tracer l'interférogramme $I = f(\delta)$:

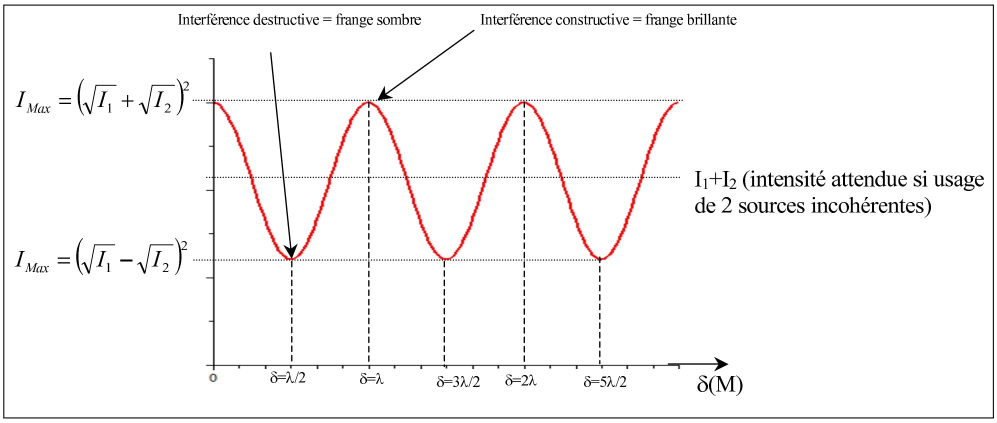


FIGURE VI.8 – Interférences à deux ondes avec mauvais contraste

c - Facteur de contraste - condition idéale de contraste

DÉFINITION - (II.4) - 2:

On appelle constraste de la figure d'interférences la grandeur suivante (définition de Michelson) :

$$\boxed{C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}}$$

Exercice de cours: **(II.4) - n° 1** *Montrer que le contraste est maximal pour* $I_1 = I_2$.

Autre écriture : $C = \dfrac{\left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 - \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2}{\left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 + \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} = \dfrac{2\sqrt{I_1 I_2}}{(I_1 + I_2)}$

soit :

$$\boxed{C = 2\frac{\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{1 + \frac{I_2}{I_1}} = 2\frac{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}{1 + \frac{I_1}{I_2}}}$$

On constate avec cette seconde écriture que : $I_1 >> I_2$ ou $I_2 >> I_1 \Rightarrow \boxed{C \simeq 0}$

CAS IDÉAL : $I_1 = I_2 = I_0 \Rightarrow$ **le contraste est maximal et vaut 1**
La fonction d'intensité s'écrit alors (formule de Fresnel "idéale") :

A RETENIR : **le cas idéal !**

$$\boxed{I(M) = 2I_0 + 2I_0 \cos(k_0 \delta(M)) = 2I_0\left[1 + cos(k_0\delta(M))\right]}$$

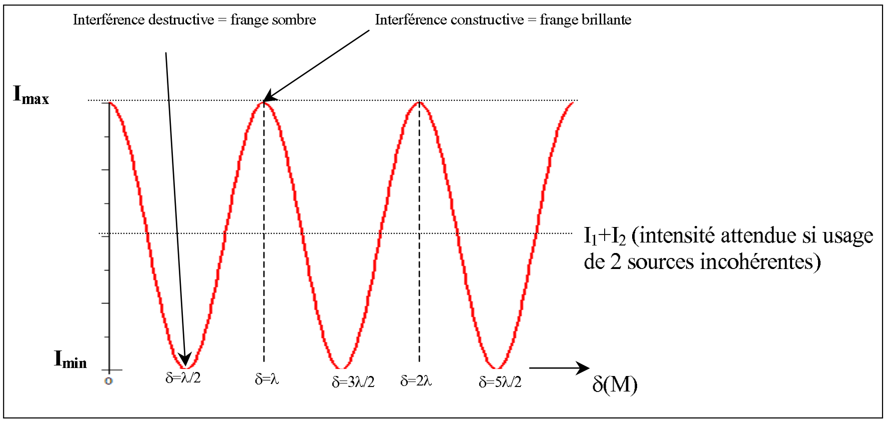
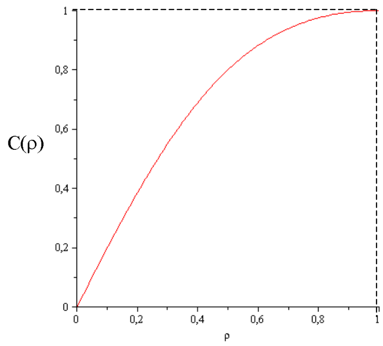


FIGURE VI.9 – Interférences à deux ondes avec bon contraste

REMARQUE - (II.4) - 1:



On peut réaliser une étude plus fine du contraste ; supposons que $\psi_{02}(M) < \psi_{01}(M) <$: les amplitudes des deux vibrations présentent alors un rapport ρ entres-elles tel que :

$$0 < \rho = \frac{\psi_{02}}{\psi_{01}} < 1$$

La formule de Fresnel s'écrit alors : $I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\rho I_1(M) \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]$

$$= (I_1(M) + I_2(M)) \left(1 + \frac{2\rho I_1(M)}{I_1(M) + I_2(M)} \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]\right)$$

$$= (I_1(M) + I_2(M)) \left(1 + \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cdot \cos\left[k_0 \cdot \delta(M)\right]\right)$$

On remarque facilement que $C = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \dfrac{2\rho}{1+\rho^2}$
et que C est maximal pour $\rho = 1$, i.e. $I_1 = I_2$, ce qui confirme naturellement le résultat précédent.

III Superposition de N ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre-elles

IDÉE : que se passe-t-il si l'on superpose non pas seulement deux, mais un nombre très important de vibrations lumineuses, toutes cohérentes entre-elles ?

III.1 Principe des réseaux

a - Définition

A RETENIR :

DÉFINITION - (III.1) - 3:

On appelle réseau de diffraction un ensemble de N pupilles (on parle de «motifs») identiques de très petites dimensions par rapport à la longueur d'onde $\lambda << D_{caract}$ et régulièrement espacées.

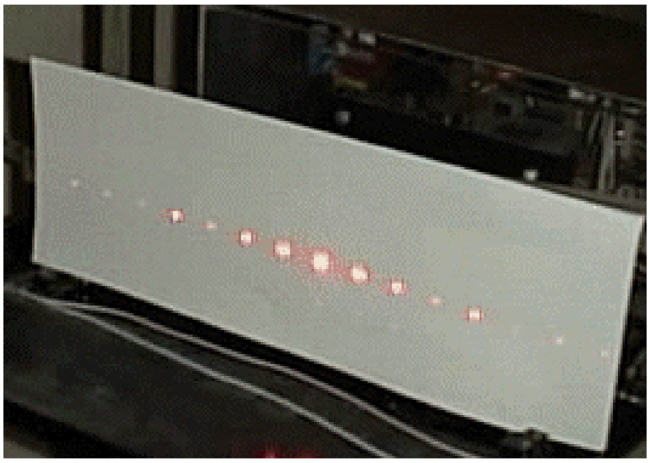
Restrictions de notre étude : *on limitera notre approche au cas des réseaux $1D$, donc constitués de la répétition du motif élémentaire, chacun espacé de son voisin d'une distance a appelée* **pas du réseau**. *On définit le nombre de traits par unité de longueur n avec : $n\left(mm^{-1}\right) = \frac{1}{a(mm)}$*

EN PRATIQUE : on réalise sur un plaque de verre des petites "entailles" de très faible largeur et dont la surface dépolie par la gravure diffuse de la lumière dans toutes les directions de l'espace, à la différence des autres zones du réseau qui laisse passer la lumière au sens de l'optique géométrique $\Leftrightarrow$ **équivalent à un réseau de fentes**

A RETENIR :

Dans un réseau éclairé par une onde harmonique quelconque, chaque trait se comporte comme une source secondaire émettant dans le demi-espace aval une onde de même fréquence que l'onde incidente et de manière isotrope.

Expérience :



- On place un réseau $600\ traits/mm$ sur un support.
- On éclaire la face du réseau par un laser Helium-Néon.
- On observe l'éclairement sur un écran placé à $1\ m$ du réseau.

OBSERVATIONS : On observe une interférence à ondes multiples, en général destructrice, sauf pour certaines directions de l'espace pour lesquelles on constate un renforcement très marqué de l'intensité lumineuse $\Rightarrow$ ondes toutes en phase.

OBJECTIFS :
- relation donnant explicitement les directions d'intensité renforcée ?
- expression de l'intensité ?
- application ?

III.2 Relations fondamentales des réseaux

a - Condition d'interférences constructives : réseaux en transmission

QUESTION : **comment prévoir les directions d'interférences constructives des N ondes ?**

On envisage ici un réseau éclairé par une onde plane de lumière monochromatique (source S à l'infini, longueur d'onde λ) et une observation réalisée à l'infini (conditions de Fraunhofer).

On appellera θ_0 l'angle d'incidence de l'onde sur le réseau, et θ l'angle indiquant la direction d'observation de l'onde sortant du réseau.

Ecrivons la différence de marche entre deux ondes consécutives issues des traits i et $i+1$ et interférant selon une direction θ à l'infini ; on appellera a le pas du réseau (distance T_iT_{i+1}) :

$$\delta_{2/1} = S_0T_2M - S_0T_1M = T_2H_1 - T_1H_2 = T_2T_1 \times sin(\theta) - T_1T_2 \times sin(\theta_0)$$

$$= +T_{i+1}T_i \times sin(\theta) - T_iT_{i+1} \times sin(\theta_0) = \delta_{i+1/i}$$

$$= a(sin\theta - sin\theta_0)$$

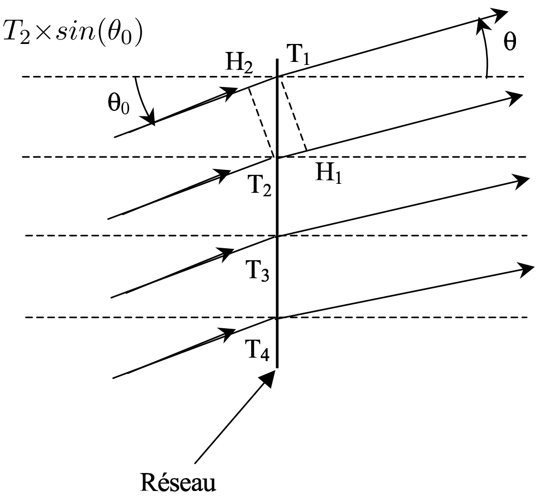


FIGURE VI.10 – Schéma d'un réseau

A RETENIR :

IDÉE : **Les interférences entre toutes les ondes issues du réseau seront constructives si la différence de marche entre chacune est égale à un multiple entier de la longueur d'onde :**

$$\delta_{max} = a(sin\theta_K - sin\theta_0) = K \times \lambda \quad \text{avec } K \text{ entier}$$

A RETENIR :

PROPRIÉTÉ - (III.2) - 4:

On retiendra finalement la relation du réseau suivante donnant les directions d'interférences constructives s'écrit :

$$\boxed{a(sin\theta_K - sin\theta_0) = K \times \lambda} \tag{VI.4}$$

avec $K \in \mathbb{Z}$ *entier appelé* **ordre d'interférence du réseau.**

ou encore

$$\boxed{sin\theta_K = sin\theta_0 + \frac{K \times \lambda}{a}} \tag{VI.5}$$

NB :
- $K \nearrow \Rightarrow \ \theta \nearrow$
- $K = 0 \Rightarrow$ *conditions de l'optique géométrique soit : les rayons traversent la lame en ligne droite*
- $K \neq 0 \Rightarrow$ *la position des maximas d'intensité dépend de* $\lambda \Rightarrow$ **Système dispersif en lumière polychromatique**

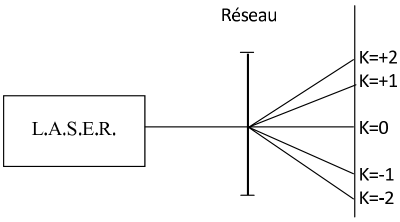


FIGURE VI.11 – Disposition relative des ordres de diffraction d'un réseau

b - Condition d'interférences constructives : réseaux en réflexion

Le réseau est maintenant exploité en réflexion ; en tenant compte de l'algébricité des angles (sur le dessin ci -contre θ_0 et θ ont été choisis positifs arbitrairement),la différence de marche entre deux ondes consécutives issues des traits i et $i+1$ et interférant selon une direction θ à l'infinis'écrit :

$$\delta_{i+1/i} = \delta_{2/1} = H'T_2 + T_2H"$$
$$= T_iT_{i+1} \times sin(\theta) + T_iT_{i+1} \times sin(\theta_0)$$
$$= a(sin\theta + sin\theta_0)$$

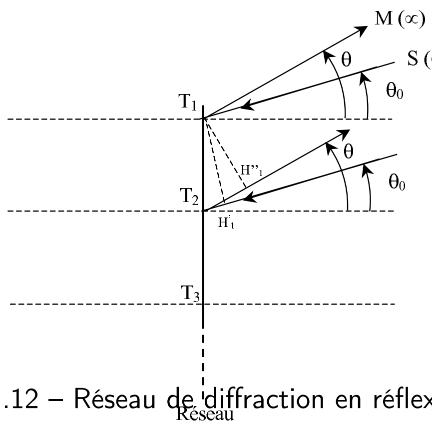


FIGURE VI.12 – Réseau de diffraction en réflexion

soit pour une interférence constructives

$$\delta_{max} = a(sin\theta_K + sin\theta_0) = K \times \lambda$$

A RETENIR :

On en tire la relation fondamentale des **réseaux en réflexion** :

$$\boxed{a(sin\theta_K + sin\theta_0) = K \times \lambda} \quad \text{avec } K \in \mathbb{Z} \tag{VI.6}$$

ou

$$\boxed{sin\theta_K = \frac{K\lambda}{a} - \sin\theta_0} \quad \text{avec } K \in \mathbb{Z} \tag{VI.7}$$

c - Relation du minimum de déviation (réseaux en transmission)

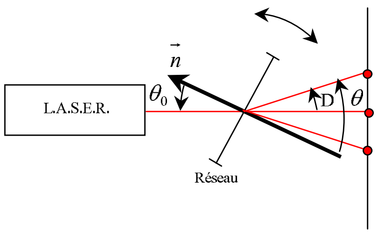


FIGURE VI.13 – Recherche du minimum de déviation

Supposons un réseau éclairé en lumière monochromatique plane.

EXPÉRIENCE DE COURS : en observant dans la direction d'une interférence constructive d'ordre 1 , on constate en faisant varier θ_0 (angle d'incidence) que **la déviation du faisceau passe par un minimum**.

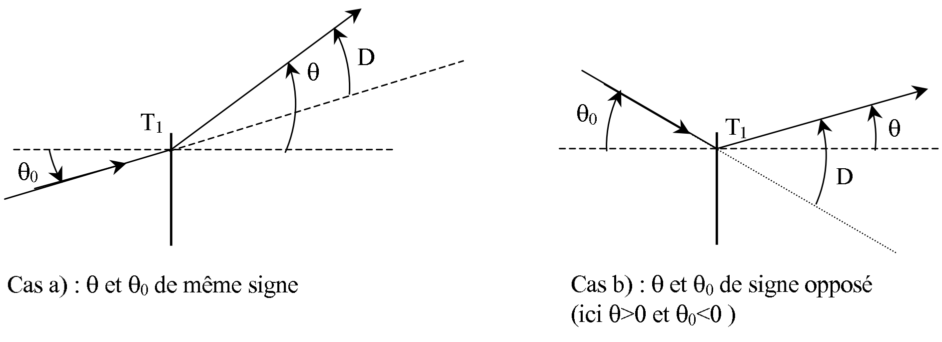


FIGURE VI.14 – Angle de déviation d'un faisceau par un réseau

Question : Quelles sont les conditions angulaires du minimum de déviation ?

Les interférences de toutes les ondes issues du réseau étant constructives pour λ, la relation du réseau est vérifiée :

$$a(sin\theta_K - sin\theta_0) = K \times \lambda$$

La déviation s'écrit :

$$D_K = \theta_K - \theta_0$$

Evaluons la dérivée de la déviation par rapport à l'angle d'incidence θ_0 :

$$\frac{dD_K}{d\theta_0} = \frac{d\theta_K}{d\theta_0} - 1$$

En outre, en différençiant la relation d'interférence constructive (a, λ et K étant des constantes) :

$$\frac{d\theta_K}{d\theta_0} = \frac{cos\theta_0}{cos\theta_K}$$

donc :

$$\frac{dD}{d\theta_0} = \frac{cos\theta_0}{cos\theta_K} - 1$$

Il résulte que la déviation D_K est minimale pour $\theta_K = \pm\theta_0$, soit $D_m = 0$ ou $D_m = -2\theta_0$. Le cas $\theta = +\theta_0$ soit $D_m = 0$ ne présente aucun intérêt puisqu'il correspond au rayon non diffracté.

Ceci entraîne :

$$D_m = -2\theta_0 = 2\theta_{K_m}$$

et

$$a(sin\theta - sin\theta_0) = a\left[sin\left(\frac{D_m}{2}\right) - sin\left(-\frac{D_m}{2}\right)\right] = 2a \times sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = K \times \lambda$$

soit :
<u>A RETENIR :</u>

$$\boxed{sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = \frac{K \times \lambda}{2a}} \qquad \text{(VI.8)}$$

d - Pouvoir dispersif d'un réseau

Considérons un ordre K fixé. La déviation s'écrit :

$$D_K = \theta_K - \theta_0$$

La relation de réseau s'écrit également :

$$\sin\theta_K = \sin\theta_0 + \frac{K\lambda}{a}$$

qui donne par différenciation :

$$\cos\theta_K \cdot d\theta_K = \frac{K}{a}d\lambda \Rightarrow d\theta_K = \frac{K}{a\cos\theta_K} \cdot d\lambda$$

soit :

$$\frac{d\theta_K}{d\lambda} = \frac{K}{a\cos\theta_K}$$

soit finalement l'expression du pouvoir dispersif du réseau :

<u>A RETENIR :</u>

$$\boxed{P_d = \frac{dD_K}{d\lambda} = \frac{d\theta_K}{d\lambda} = \frac{K}{a\cos\theta_K}} \text{ (pouvoir dispersif)}$$

NB : cette grandeur caractérise la qualité du réseau qui se veut d'autant meilleur que sa capacité à disperser les différentes longueurs d'onde est grande.

<u>COMMENTAIRES :</u>

- Le pouvoir dispersif est d'autant plus important que l'ordre K considéré l'est. Cependant le choix d'un ordre élevé entraîne un affaiblissement de l'intensité lumineuse. (modulation de l'intensité par la fonction de diffraction du motif élémentaire $\Longrightarrow$ plus au programme)
- La dispersion est d'autant meilleure que le pas du réseau a est faible (problème : coût de fabrication en "exponentielle" de a ! ! !)

CONSÉQUENCES :

Supposons un réseau éclairé sous incidence normale $\theta_0 = 0$ par deux radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$. On observe la déviation des radiations à l'ordre K.

<u>Deux cas de figure :</u>

- $K > 0$:
  Avec la formule fondamentale des réseaux on a : $\sin\theta_K = \frac{K}{a}\lambda > 0$ donc $\theta_K = D_K > 0$
  ainsi :
  $$\frac{dD_K}{d\lambda} = \frac{K}{a\cos\theta_K} > 0$$
  $\Longrightarrow$ **la radiation de plus forte longueur d'onde λ_2 est davantage déviée que celle de longueur d'onde λ_1** soit $D_K(\lambda_2) > D_K(\lambda_1) > 0$
- $K < 0$:
  Cette fois : $\sin\theta_K = \frac{K}{a}\lambda < 0$ donc $\theta_K = D_K < 0$
  ainsi :
  $$\frac{dD_K}{d\lambda} = \frac{K}{a\cos\theta_K} < 0$$
  $\Longrightarrow$ **la radiation de plus forte longueur d'onde λ_2 est là encore davantage déviée que celle de longueur d'onde λ_1** $D_K(\lambda_2) < D_K(\lambda_1) < 0$ (mais cette fois vers les valeurs angulaires négatives).

A RETENIR :

PROPRIÉTÉ - (III.2) - 5:

Lors de l'utilisation d'un réseau en lumière polychromatique, la déviation d'une radiation est d'autant plus forte que sa longueur d'onde est élevée.

III.3 Vibration lumineuse en sortie d'un réseau

a - Intensité et fonction de réseau

On considère un réseau utilisé en transmission et éclairé sous incidence non nécessairement normale, par une onde monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide arrivant d'une source S_0 située à l'infini .

On rappelle la différence de marche entre deux motifs consécutifs

$$\delta_{i+1/i} = S_0\widehat{O_{i+1}}M - S_0\widehat{O_i}M = a\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right)$$

soit la différence de phase entre deux motifs consécutifs :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{i+1/i} &= k_0\left(S_0\widehat{O_{i+1}}M - S_0\widehat{O_i}M\right)\\ &= \frac{2\pi a}{\lambda}\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right) = \Delta\varphi \neq f(i)\end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde émise par un seul motif indicé i centrée en O_i dans la direction du point M à l'infini s'écrit :

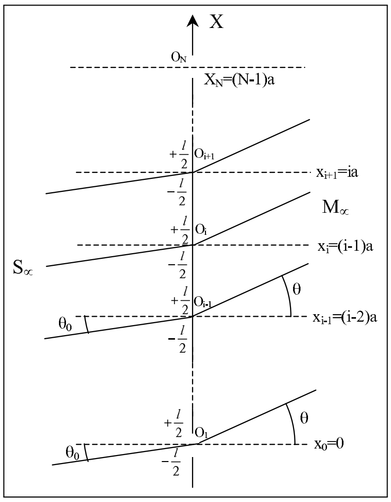


FIGURE VI.15 – *Schéma du réseau de pas a.*

$$\psi_i(M,t) = \psi_{S_0}(M)e^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_i}M - \phi_{S_0}\right)} \underset{\text{onde plane}}{=} Ke^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_i}M - \phi_{S_0}\right)}$$

ainsi :

$$\begin{cases}\psi_1(M,t) = Ke^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_1}M - \phi_{S_0}\right)}\\ \psi_2(M,t) = Ke^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_2}M - \phi_{S_0}\right)}\\ \ldots\ldots\\ \psi_N(M,t) = Ke^{j\left(\omega t - k_0 S_0\widehat{O_N}M - \phi_{S_0}\right)}\end{cases}$$

Les ondes étant cohérentes entre-elles, la vibration résultante s'obtient par sommation de toutes les vibrations émises en direction de M :

$$\psi(M,t) = \sum_{i=1}^{N}\psi_i(M,t) = K\cdot e^{j(\omega t - \phi_{S_0})}\sum_{i=1}^{N} e^{-jk_0 S_0\widehat{O_i}M}$$

$$= K \cdot e^{j(\omega t - \phi_{S_0})} \times \left[e^{-jk_0 S_0 \widehat{O_1} M} + e^{-jk_0 S_0 \widehat{O_2} M} + e^{-jk_0 S_0 \widehat{O_3} M} + ... + e^{-jk_0 S_0 \widehat{O_N} M} \right]$$

$$= \underbrace{K \cdot e^{j(\omega t - \phi_{S_0})}}_{=cste(j\omega)} \times$$

$$e^{-jk_0 S_0 \widehat{O_1} M} \left[1 + e^{-j \underbrace{k_0 (S_0 \widehat{O_2} M - S_0 \widehat{O_1} M)}_{\Delta\varphi}} + e^{-j \underbrace{k_0 (S_0 \widehat{O_3} M - S_0 \widehat{O_1} M)}_{2\Delta\varphi}} + ... + e^{-j \underbrace{k_0 (S_0 \widehat{O_N} M - S_0 \widehat{O_1} M)}_{=(N-1)\Delta\varphi}} \right]$$

soit :

$$\psi(\Delta\varphi) = cste(j\omega) \times e^{-jk_0 S_0 \widehat{O_1} M} \left[1 + e^{-j\Delta\varphi} + e^{-2j\Delta\varphi} + ...e^{-(N-1)j\Delta\varphi} \right]$$

$$\psi(\Delta\varphi) = cste(j\omega) \times e^{-jk_0 S \widehat{O_1} M} \times \frac{1 - e^{-jN\Delta\varphi}}{1 - e^{j\Delta\varphi}} = cste(j\omega) \times e^{-jk_0 S_0 \widehat{O_1} M} \times \frac{e^{-jN\frac{\Delta\varphi}{2}}}{e^{-j\frac{\Delta\varphi}{2}}}$$

$$\times \frac{e^{jN\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{-jN\frac{\Delta\varphi}{2}}}{e^{j\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{-j\frac{\Delta\varphi}{2}}}$$

et finalement :

$$\psi(\Delta\varphi) = cste(j\omega) \times e^{-jk_0 S_0 \widehat{O_1} M} \times e^{-j(N-1)\frac{\Delta\varphi}{2}} \times \frac{\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

L'intensité diffractée par le réseau en M (caractérisé par $\Delta\varphi$) est donc :

$$I\left(M(\Delta\varphi)\right) = \frac{K'}{\psi}(M) \times \psi(M)^* = \underbrace{K' |cste(j\omega)|^2}_{I_0} \times \left[\frac{\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

soit finalement

<u>A RETENIR :</u>

$$\boxed{I(M) = N^2 I_0 \cdot \underbrace{\left[\frac{\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]^2}_{=R(\Delta\varphi)}}$$

NB : $\Delta\varphi = f(\theta)$!!!

$R(\Delta\varphi)$ est appelée fonction de réseau.

b - Analyse succincte de la fonction de réseau $R(\Delta\varphi)$

On propose ici une analyse succincte de la fonction d'intensité du réseau :

NB : $\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)$ 4π périodique $\rightarrow \sin^2\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)$ 2π périodique $\rightarrow R(\Delta\varphi)$ est 2π périodique.

- Annulation :

$$\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)=0 \; et \; \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta\varphi=\frac{2p\pi}{N} \text{ avec } p\in\mathbb{Z} \text{ non multiple de } N$$

- Maxima primaires : compte tenu de la périodicité de la fonction, on étudie la fonction au voisinage de $\Delta\varphi=0$ seulement

$$\Delta\varphi\simeq 0 \quad\Rightarrow\quad R(\Delta\varphi)\simeq\left[\frac{\sin\left(N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}{N\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}\right]^2=sinc^2\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

NB : petit rappel sur la fonction "sinus cardinal" en live ! ! !

Ainsi, la fonction de réseau est assimilable à un sinus cardinal autour de son maximum qui s'annule pour :

$$N\Delta\varphi/2=\pm\pi \;\Rightarrow\; \Delta\varphi=\pm\frac{2\pi}{N}$$

La largeur du pic central (et des autres pics) est donc :

$$\boxed{\Delta(\Delta\varphi)=2\times\frac{2\pi}{N}}$$

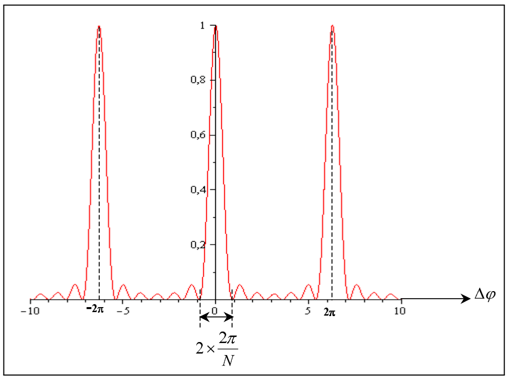


Figure VI.16 – *Tracé de la fonction $R(\Delta\varphi)$*

c - Pouvoir séparateur d'un réseau : critère de Rayleigh

On peut reformuler la fonction de réseau R avec la variable θ ; il vient alors :

$$R(\sin\theta) = \left[\frac{\sin\left(\dfrac{N\pi a}{\lambda}(sin\theta - \sin\theta_0)\right)}{N\sin\left(\dfrac{\pi a}{\lambda}(sin\theta - \sin\theta_0)\right)}\right]^2$$

La largeur d'un pic en variable $\sin\theta$ est : $\Delta(\Delta\varphi) = 2\times\dfrac{2\pi}{N} \Rightarrow \Delta\left[\dfrac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)\right] = 2\times\dfrac{2\pi}{N}$
soit en choisissant une incidence normale $\theta_0 = 0$ (condition "théorique" classique[1]) :

$$\boxed{\Delta(\sin\theta) = 2\times\frac{\lambda}{Na}}$$

Question : peut-on séparer deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 (par exemple le doublet du sodium $\lambda_1 = 589\ nm$ et $\lambda_2 = 589,6\ nm$).

HYPOTHÈSE : on se place en incidence normale.

Le tracé des fonctions $R(\sin\theta)$ pour chacune de ces deux radiations est représenté ci-dessous :

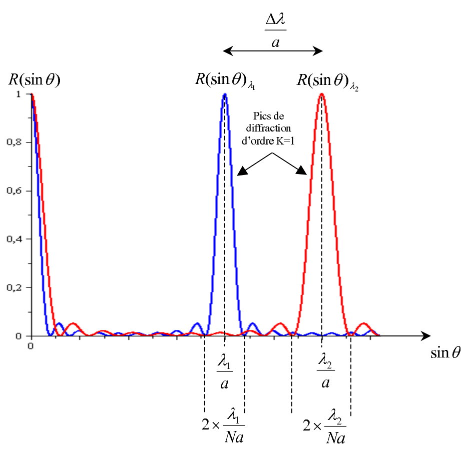


FIGURE VI.17 – Résolution totale de deux radiations λ_1 et λ_2

D'après la formule des réseaux en transmission, pour un ordre K donné, les positions angulaires des maximas sont (en incidence normale $\theta_0 = 0$) :

$$\sin\theta_K(\lambda_1) = K\frac{\lambda_1}{a} \qquad et \qquad \sin\theta_K(\lambda_2) = K\frac{\lambda_2}{a}$$

Les deux pics de l'ordre K sont donc distants de : $\boxed{\Delta(\sin\theta_K) = \dfrac{K}{a}\Delta\lambda}$

1. théorique seulement car difficile à réaliser rigoureusement en pratique ; on contourne cette difficulté très facilement (cf TP).

DÉFINITION - (III.3) - 4:

On appelle critère de Rayleigh, la condition arbitraire de limite de discernabilité de deux maxima d'intensité proches correspondant chacun à une radiation. Quantitativement, cette situation correspond au cas où un maximum d'intensité d'une des radiations correspond au premier minima de la seconde.

La limite de résolution selon le critère de Rayleigh impose donc :

$$\Delta(\sin\theta_K) = \frac{K}{a}\Delta\lambda \geq \frac{\lambda_{1/2}}{Na} \quad soit \quad \boxed{\Delta\lambda|_{limite} \simeq \frac{\overline{\lambda}}{KN}}$$

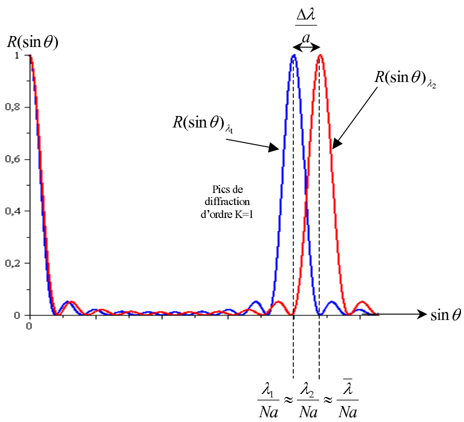


FIGURE VI.18 – Limite de résolution des deux radiations λ_1 et λ_2 selon le critère de Rayleigh

d - Problème du recouvrement des ordres

Le spectre de lumière blanche dispersé par un prisme est unique ; en revanche lorsque l'on procède à la dispersion par un réseau, plusieurs ordres apparaissent avec un risque de chevauchement.

Question : quels ordres sont susceptibles de se chevaucher ?

L'expérience montre que seul le premier ordre n'est pas recouvert (cf TP réseau !). Démontrons ceci !

Supposons que deux radiations de longueurs d'onde respectives λ_1 et λ_2 issues de deux ordres consécutifs se chevauchent en sortie de réseau ; on a :

$$a\left[\sin\theta_K - \sin\theta_i\right] = K \cdot \lambda_1 = (K+1)\lambda_2 \text{ avec } \lambda_1 > \lambda_2$$

On peut alors isoler l'ordre K correspondant :

$$K = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Par exemple, pour le cas du visible, le premier risque de chevauchement concerne les radiations extrêmes du spectre : le violet $\lambda_2 = 0,4\ \mu m$ du spectre d'ordre $K+1$ recouvrirait le rouge $\lambda_1 = 0,8\ \mu m$ du spectre d'ordre K. Dans ces conditions, l'ordre K serait :

$$K = \frac{0.4}{0.780 - 0.4} = 1,05$$

Conclusion : Les radiations dans l'ordre 1 ne subissent pas de chevauchement ; le chevauchement apparaît cependant dès les ordres 2 et 3.

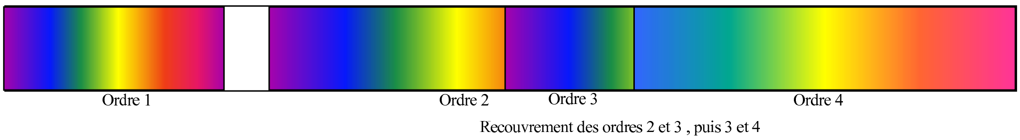


Figure VI.19 – Phénomène de recouvrement des ordres d'un réseau lors de la dispersion de la lumière blanche